Übungen zur Vorlesung PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Übungsblatt 1 , Abgabe: 26.10.2000 , 15.00 Uhr, Übungskasten 75, 76

Aufgabe 1: (4 Punkte)

a) Eine Funktion $u \in C^\infty(\ ^n \setminus \{0\})$ heißt homogen vom Grade α, wenn

$$u(tx) = t^\alpha u(x) \ , \qquad \forall \quad x \in \ ^n, \quad x \neq 0, \quad t \in \ ^+$$

gilt.

Zeigen Sie: $u \in C^\infty(\ ^n \setminus \{0\})$ ist genau dann homogen vom Grade α, wenn

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \alpha u \ .$$

b) Lösen Sie die Aufgabe

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{in} \quad ^2 \setminus \{0\} \ ,$$

$u = f(x)$ auf dem Kreis um 0 vom Radius 1. Setzen Sie hinreichende Regularität von u und f voraus.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei $u \in C^1(\ ^2)$.

(a) Zeigen Sie: u ist genau dann eine radiale Funktion (d.h. $u(x)$ hängt nur von $x_1^2 + x_2^2$ ab), wenn

$$x_2 u_{x_1} - x_1 u_{x_2} = 0 \ .$$

(b) Leiten Sie eine entsprechende Differentialgleichung her für Funktionen u, welche entlang der Ellipsen $(x_1 - m_1)^2/a^2 + (x_2 - m_2)^2/b^2 = 1$, $(m_1, m_2) \in \ ^2$ fest, $a = kb$, $\quad k \in \ \setminus \{0\}$ fest, $b \in \ \setminus \{0\}$, konstant sind.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei $f \in C^1(\ ^1)$ beliebig.

Zeigen Sie: Erfüllt $u \in C^1(\ ^2)$ die Beziehung

$$x_2 = \frac{1}{3} u^3 + f(u - x_1) \ ,$$

so ist u Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 1\ .$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Lösen Sie die Aufgabe

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = f(x), \qquad & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $c > 0$ und Funktionen $f \in C^2(\quad)$, $g \in C(\quad)$.

Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 2 , Abgabe: 02.11.2000, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 5: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u^2$$

(a) Zeigen Sie, daß die Anfangswertaufgabe

$$u = x \quad \text{entlang} \quad \Gamma : x + y = 0$$

eine in einer Umgebung von Γ eindeutig bestimmte Lösung hat, welche bei Annäherung an die Hyperbel $x^2 - y^2 = 4$ betragsmäßig unendlich wird.

(b) Die Anfangswertaufgabe

$$u = f(x) \quad \text{entlang} \quad \Gamma : x - y = 0$$

besitze eine in einer Umgebung eines Punktes von Γ stetig differenzierbare Lösung.

Zeigen Sie, daß dann in dieser Umgebung $f(x) = -1/(x + c)$ mit einer Konstanten c oder $f \equiv 0$ ist.

Aufgabe 6:

(a) Seien a, $b \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Wir betrachten die lineare homogene Differentialgleichung

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \; .$$

Zeigen Sie: Ist $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ entlang jeder Lösung von

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y) \;\; , \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y)$$

konstant, so ist u eine Lösung der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie nach der Methode aus (a) eine Lösung von

$$u_x + 3x^2 u_y = 0 \; .$$

Aufgabe 7: Sei $u = f(x, y, c)$ eine Flächenschar im $\mathbb{R}^3$ mit Parameter c. Sei g eine Funktion mit

$$\frac{\partial}{\partial c} f(x, y, g(x, y)) = 0 \; .$$

Dann heißt $u = f(x, y, g(x, y))$ Einhüllende der Flächenschar.

(a) Zeigen Sie: Ist jede Fläche der Schar Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \ ,$$

so auch die Einhüllende.

(b) Zeigen Sie, daß die Flächen

$$u = \sqrt{1 - (x-c)^2 - y^2} \ , \quad (x-c)^2 + y^2 < 1$$

für jedes c Lösungen der Differentialgleichung

$$u^2 \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) = 1$$

sind und bestimmen Sie eine weitere Lösung durch Bildung der Einhüllenden.

Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 3 , Abgabe: 09.11.2000, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 8: (4 Punkte)
Wir betrachten die Eikonalgleichung $|p| = 1$ in $\mathbb{R}^n$. Sei $\Gamma : x = \xi(1)$, $\xi \in C^2$, eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ und sei $Rg\left(\frac{\partial\xi}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial\xi}{\partial s_{n-1}}\right)$ maximal.

(a) Zeigen Sie: In einer Umgebung von Γ gibt es zwei verschiedene Lösungen, welche entlang Γ den Wert 1 annehmen.

(b) Für jede dieser Lösungen u ist $|u(x) - 1|$ der Abstand von x zu Γ.

(c) Berechnen Sie die beiden Lösungen, wenn Γ ein Teil der Sphäre $|x| = 1$ ist.

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Wir betrachten die Differentialgleichung $F(x, u, p) = 0$ mit $F \in C^1$. Für alle $a \in \mathbb{R}^2$ sei $u(x) = \phi(x, a)$ eine Lösung. Zeigen Sie:

(a) Gibt es $a \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $\nabla_a \phi(x, a(x)) = 0$ in $\mathbb{R}^2$, so ist auch $u(x) = \phi(x, a(x))$ Lösung. Sie heißt singuläre Lösung.

(b) Ist die Jacobi-Matrix der Abbildung $x \to \nabla_a \phi(x, a)$ nicht singulär, so gilt für die singuläre Lösung $\nabla_p F(x, a, p) = 0$.

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Wir betrachten die Clairotsche Differentialgleichung

$$u = p \cdot x + f(p) , \qquad f \in C^2(\mathbb{R}^n)$$

(a) Berechnen Sie die Charakteristiken.

(b) Zeigen Sie, daß für alle $a \in \mathbb{R}^n$

$$u = a \cdot x + f(a)$$

Lösung ist.

(c) Berechnen Sie die singuläre Lösung (vgl. Aufgabe 9) für $n = 2$ und $f(p) = -p_1 p_2$.

(d) Bauen Sie die singuläre Lösung explizit durch Charakteristiken auf.

Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 4 , Abgabe: 16.11.2000, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 11: (4 Punkte)
Berechnen Sie (per Hand oder mit Maple) die Charakteristiken der folgenden drei Differentialgleichungen und lassen Sie sich die von ihnen definierten Flächen von Maple für die jeweils angegebenen Definitionsbereiche graphisch anzeigen.

$$(a): \quad x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x,0) = \ln x, \quad (x \in]0,1]);$$

$$(b): \quad x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = u, \quad u(x,0) = \ln x, \quad (x \in]0,1]);$$

$$(c): \quad xu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(x,0) = x, \quad (x \in [-2,2]).$$

(Hinweis: Verwenden Sie jeweils $s = x$ für die Parametrisierung der Anfangskurve.)

Aufgabe 12: (4 Punkte)
In der Differentialgleichung

$$p = f(q)\ , \quad p = \frac{\partial u}{\partial x}\ , \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

sei $f \in C^2$, und f' besitze eine differenzierbare Umkehrfunktion.

(a) Berechnen Sie den Mongeschen Kegel zu einem beliebigen Punkt (x, y, z) des $I\!R^3$.

(b) Zeigen Sie, daß er außerhalb der $x' = x$ Kurve eine Lösungsfläche ist.

(c) Geben Sie auf $\Omega = I\!R^+ \times I\!R$ für $f : \xi \to \frac{1}{2}\xi^2$ mit Hilfe der Mongeschen Kegel ein vollständiges Integral an.

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Lösen Sie die Aufgabe 8c mit Hilfe des vollständigen Integrals der Eikonalgleichung.

Aufgabe 14: (4 Punkte)

(a) Wir betrachten eine Differentialgleichung der Form

$$H(f(x,p), g(y,q)) = 0$$

mit $H,\, f,\, g \in C^1(IR^2)$ und $p = \frac{\partial u}{\partial x},\ \ q = \frac{\partial u}{\partial y}$. Sei $H(a,b) = 0$, und es gebe Funktionen $\varphi,\, \gamma \in C^1(IR^2)$

$$f(x, \varphi(a,x)) = a\ , \qquad g(y, \gamma(b,y)) = b\ .$$

Zeigen Sie: Dann ist

$$\phi(x,y,a,b,c) = \int^{x} \varphi(a,\tilde{x})d\tilde{x} + \int^{y} \gamma(b,\tilde{y})d\tilde{y} + c$$

eine Lösung der Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie vollständige Integrale für die Differentialgleichungen

(i) $F(p,q) = 0$,

(ii) $p = qy$,

(iii $x^2p^2 + y^2q^2 = 1$ auf $IR^+ \times IR^+$.

Prof. Dr. F. Natterer WS 2000/2001

Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 5 , Abgabe: 23.11.2000, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 15: (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Das System

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0 \\
a(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} &= f(x,y)
\end{aligned}
$$

ist in (x, y) hyperbolisch, parabolisch, elliptisch, je nachdem $a(x, y)\ > 0,\ = 0,$ bzw. < 0 ist.

(b) Stellen Sie im hyperbolischen Fall die Normalform her.

(c) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$\wedge\ y$

$a = 1$

$>$

$u = 0$ x

und bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit Maple für $a = 1$.

Aufgabe 16: (4 Punkte)
Das System

$$
(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + A\frac{\partial u}{\partial x} = Bu + c
$$

sei in Ω hyperbolisch. Sei

$$
\phi : (x, y) \longrightarrow (\xi(x, y), \eta(x, y))
$$

eine stetig differenzierbare und umkehrbar eindeutige Abbildung von Ω auf Ω'. Sei u eine Lösung in Ω und sei $v = u \circ \phi^{-1}$.

Zeigen Sie: v ist Lösung eines hyperbolischen Systems 1. Ordnung, dessen Charakteristiken von der Form ϕC sind mit Charakteristiken C von (1).

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Wir betrachten das lineare System in $u(x,t)$, $v(x,t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + v + tx &= 0\,, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + (1-tx)u + t &= 0\,. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, daß das System in $I\!R^2$ hyperbolisch ist und berechnen Sie die Charakteristiken.

(b) Zeigen Sie, daß die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u(x,0) = x\ , \quad v(x,0) = 0\ , \quad x \in I\!R^1$$

in $(I\!R^- \cup \{0\}) \times (I\!R^+ \cup \{0\}) \cup \{(x,t),\ \ 0 \le t < \frac{1}{x}\}$ existiert.

Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 6 , Abgabe: 30.11.2000, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 18: (4 Punkte)
Wir betrachten die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \tag{1}$$

und das lineare System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} a\frac{\partial p}{\partial x} + b\frac{\partial p}{\partial y} + c\frac{\partial q}{\partial y} &= f \ , \\ \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei seien a, b, $c \neq 0$, f stetige Funktionen von x, y in einem Gebiet $\Omega \subseteq I\!R^2$.
Zeigen Sie:

(a) Besitzt (1) eine Lösung $u \in C^2(\Omega)$, so ist

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} \ , \quad q = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3}$$

eine Lösung von (2).

(b) Sind p, $q \in C^1(\Omega)$ Lösung von (2) und ist Ω einfach zusammenhängend, so gibt es eine Lösung $u \in C^2(\Omega)$ von (1) mit (3).

(c) (1) ist genau dann elliptisch (parabolisch, hyperbolisch), wenn (2) elliptisch (parabolisch, hyperbolisch) ist.

Aufgabe 19: (4 Punkte)
In welchen Punkten des $\mathbb{R}^2$ sind die Differentialgleichungen

a.) $u_{xx} + yu_{yy} + 3u_y = 0,$

b.) $u_{yy} - yu_{xx} = 0, \quad (Tricomi - Gleichung)$

c.) $u_{xx} - \alpha^2 u_{yy} + \beta u_x = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (Telegraphengleichung)$

hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch? Benutzen Sie Maple, um eine explizite allgemeine Lösung anzugeben und erklären Sie die auftretenden Funktionen.

Aufgabe 20: (4 Punkte)
Sei $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, und sei

$$v(x,r) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{S^{n-1}} u(x+ry)\, d\sigma(y).$$

Zeigen Sie: v genügt der Gleichung

$$v_{rr} + \frac{n-1}{r} v_r - \Delta v = 0$$

und den Anfangsbedingungen

$$v(x,0) = u(x), \qquad v_r(x,0) = 0.$$

ω_n bezeichnet dabei wieder die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel.

Prof. Dr. F. Natterer WS 2000/2001

Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 7 , Abgabe: 07.12.2000, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Sei Ω ein Gebiet in $I\!R^n$ und $u \in C(\Omega)$. u habe in Ω die Mittelwerteigenschaft, d.h. für jedes $x \in \Omega$ ist $u(x)$ der Mittelwert von u über die Oberfläche jeder ganz in Ω liegenden Kugel mit Mittelpunkt x.

Zeigen Sie: Dann ist u in Ω harmonisch.

Hinweis: Die Lösung eines lokalen Dirichlet-Problems zur Laplacegleichung ist harmonisch. Aus der Mittelwerteigenschaft folgt das Maximumprinzip.

Aufgabe 22: (8 Punkte)
Zeigen Sie, daß das Poissonsche Integral für den Kreis vom Radius r um den Nullpunkt die Form

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{2\pi r} \int\limits_{|y|=r} \frac{g(y)}{|x-y|^2}\, dy \; .$$

hat.

Aufgabe 23: (4 Punkte)

(a) Sei Ω die Kugel vom Radius r um x_0 in $I\!R^n$, $n \geq 3$, und sei $u \in C(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω.

Zeigen Sie: Ist $u \geq 0$, so gilt $\forall\, x \in \Omega$

$$\left(\frac{r}{r+|x-x_0|}\right)^{n-2} \frac{r-|x-x_0|}{r+|x-x_0|}\, u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{r}{r-|x-x_0|}\right)^{n-2} \frac{r+|x-x_0|}{r-|x-x_0|} u(x_0)\; .$$

(b) Zeigen Sie: Eine in $I\!R^n$, $n \geq 3$, harmonische Funktion, die nur ein Vorzeichen hat, ist konstant.

Aufgabe 24: (4 Punkte)

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ harmonisch und $x \in \Omega$. Sei r so klein, daß auch die Kugel $B_r(x)$ um x mit Radius r noch in Ω liegt. Dann gilt

$$u(x) = \frac{n}{r^n \omega_n} \int\limits_{B_r(x)} u(y)dy = \frac{n}{\omega_n} \int\limits_{B_1(0)} u(x+ry)dy \; .$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von a) den Satz von Liouville: Jede beschränkte auf ganz $\mathbb{R}^n$ harmonische Funktion ist konstant.

Hinweis zu b): Schätzen Sie $|u(x) - u(0)|$ für $x \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe von a) nach oben ab.

Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 8 , Abgabe: 14.12.2000, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $I\!R^2$, das mindestens einen endlichen Punkt nicht enthält, und sei $y \in \Omega$. Sei f_y die analytische Funktion, welche Ω eineindeutig auf den Einheitskreis abbildet, und zwar so, daß $f_y(y) = 0$, $f_y'(y) = 1$ gilt (Riemannscher Abbildungssatz).

Zeigen Sie: Die Greensche Funktion von Ω ist

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \log |f_y(x)| .$$

(Dabei wird der Punkt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in I\!R^2$ mit der komplexen Zahl $x = x_1 + ix_2 \in \mathbf{C}$ identifiziert.)

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Sei f eine Funktion in $I\!R^n$, $n \geq 2$, die entlang $x_n = 0$ stetig und beschränkt ist. Für $x_n > 0$ sei

$$u(x) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int\limits_{y_n=0} \frac{f(y)}{|x-y|^n} \, dy_1 \ldots dy_{n-1} .$$

Zeigen Sie: u löst die Dirichletaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad , \quad x_n > 0 , \\ u &= f \quad , \quad x_n = 0 . \end{aligned}$$

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Sei $f \in C^1(I\!R^3)$, und f verschwinde außerhalb einer beschränkten Menge. Sei $u \in C^2(I\!R^3)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2(1+f)u &= 0 \quad \text{in} \quad I\!R^3 \\ u(x) &= e^{ikx\cdot\theta} + v(x) , \end{aligned}$$

wo $\theta \in S^2$, $k > 0$ und v die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllt.

Zeigen Sie: Für $|x| \to \infty$ gilt

$$u(x) = e^{ikx\cdot\theta} + \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \, A(\frac{x}{|x|}) + O(\frac{1}{|x|^2}) ,$$

wobei für $|\omega| = 1$

$$A(\omega) = k^2 \int u(y) f(y) e^{-iky\cdot\omega} dy .$$

Aufgabe 28: (4 Punkte)
Sei Ω ein Normalgebiet in $\mathbb{R}^n$ mit Durchmesser R, und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Lösung von

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \ \Omega\ , \qquad u = g \quad \text{auf} \quad \partial\Omega\ .$$

Dann gilt in $\overline{\Omega}$

$$|u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + \frac{1}{4} R^2 \ \max_{\overline{\Omega}} |f|\ .$$

Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 9 , Abgabe: 21.12.2000, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 29: (4 Punkte)
Seien r, φ, ψ Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$, also $x = r\cos\varphi\sin\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$, $z = r\cos\psi$ mit $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \psi < \pi$. Zeigen Sie:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2\sin\psi}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\left(r^2\sin\psi\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\sin\psi\frac{\partial u}{\partial\psi}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\psi}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right) .$$

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $n = 1, 2$.

(a) Zeigen Sie: Für $n = 1$ ist $H^1(\Omega) \subseteq C(\Omega)$.

(b) Zeigen Sie an Hand des Beispiels $u(x) = \ln\ln\frac{1}{|x|}$, daß dies für $n = 2$ nicht richtig ist.

Aufgabe 31: (4 Punkte)
Sei V ein Hilbertraum, a eine stetige und V-elliptische Bilinearform und F ein stetiges lineares Funktional auf V. Sei $u \in V$ die Lösung der Variationsgleichung

$$a(u,v) = F(v) , \qquad \forall \quad v \in V .$$

Zeigen Sie: Ist a symmetrisch (d.h. $a(u,v) = a(v,u)$, $\forall \quad u,v \in V$), so nimmt das Funktional

$$v \to \frac{1}{2}\, a(v,v) - F(v)$$

auf V sein Minimum für $v = u$ an.

Aufgabe 32: (4 Punkte)
Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ in einem Normalgebiet $\Omega \subseteq I\!R^n$ harmonisch, und sei $y \in \Omega$.
Zeigen Sie: $u(x)$ läßt sich in einer Umgebung von y in eine Potenzreihe

$$u(x) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n}(x_1 - y_1)^{k_1}\ldots(x_n - y_n)^{k_n}$$

entwickeln, und diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 10 , Abgabe: 18.01.2001, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 33: (4 Punkte)
Sei Ω ein Normalgebiet in IR^n, und sei $u \in C^2(\overline{\Omega \times (0,\infty)})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta_x u \qquad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty)\ , \\ u &= 0 \qquad \text{in} \quad \partial\Omega \times (0,\infty)\ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Es ist

$$\int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) \right)^2 \right\} dx$$

unabhängig von t.

(b) u ist eindeutig bestimmt durch die Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t = 0$.

Aufgabe 34: (4 Punkte)
Sei u Lösung der Aufgabe

$$u_x - u_y - q(x)u = 0 \qquad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad , \quad x \in \mathbb{R}^1\ .$$

mit stetigen Funktionen q, ϕ. Zeigen Sie: Ist $\phi(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^1$, so ist q durch die Funktionen ϕ und $u(0,\ \cdot\ )$ eindeutig bestimmt.

Aufgabe 35: (4 Punkte)
Sei $F \in C^2(\mathbb{R}^1 \times S^{n-1})$ und

$$f(x) = \int_{S^{n-1}} F(x \cdot \theta, \theta) d\sigma(\theta)\ .$$

Zeigen Sie, daß

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} (F(x \cdot \theta + t, \theta) + F(x \cdot \theta - t, \theta)) d\sigma(\theta)$$

Lösung der Wellengleichung mit den Anfangswerten $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$ ist.

Aufgabe 36: (4 Punkte)
Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$u_{tt} = u_{xx} \ , \quad u(x,0) = 0 \ , \quad u_t(x,0) = g(x)$$

mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 0 & , \quad \text{sonst} \ . \end{cases}$$

Stellen Sie $u(x,x)$ für $t \geq \varepsilon$ als Funktion von x graphisch dar.

Wir wünschen allen Teilnehmern
ein gutes und erfolgreiches Neues Jahr!

Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 11 , Abgabe: 25.01.2001, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 37: (4 Punkte)
Verifizieren Sie die Kirchhoffsche Formel für $n = 1$.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\,\left(f(x+t) + f(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} g(y)dy \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} h(y,t)dyd\tau \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 38: (4 Punkte)
Leiten Sie die Kirchhoffsche Wellenformel für $n = 2$ ausführlich her.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|y|<t} \frac{g(x+y)}{\sqrt{t^2-|y|^2}}dy + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|y|<t} \frac{f(x+y)}{\sqrt{t^2-|y|^2}}\,dy \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|y|<t}\int\limits_0^{t-|y|} \frac{h(x+y,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-|y|^2}}\,d\tau dy \end{aligned}$$

Aufgabe 39: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Riemannsche Funktion für

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{x+y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \ .$$

<u>Hinweis:</u> Machen Sie den Ansatz

$$R(x,y;\xi,\eta) = \frac{\xi+\eta}{x+y}\psi\left(\frac{(\xi-x)(\eta-y)}{(x+y)(\xi+\eta)}\right)$$

mit einer linearen Funktion ψ.

Aufgabe 40: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Riemannsche Funktion für

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu \ , \qquad c < 0 \ \text{ konstant} \ ,$$

und lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} Lu &= h \quad \text{in} \quad I\!R^1 \times (0,\infty) \\ u &= f \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = g \quad \text{in} \quad I\!R^1 \times \{0\} \ . \end{aligned}$$

Übungen zur Vorlesung "PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN"

Übungsblatt 12 , Abgabe: 08.02.2001, 15.00 Uhr, Übungskasten 75 u. 76

Aufgabe 41: (4 Punkte)
Sei $f \in C(I\!R^1)$ 2π-periodisch.

Zeigen Sie, daß die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{in} \quad I\!R^1 \times (0,\infty) \\ u &= f \quad \text{in} \quad I\!R^1 \times \{0\} \end{aligned}$$

eine Lösung der Form

$$u(x,t) = \int_0^{2\pi} G(x-y,t) f(y) dy$$

mit einer in x 2π-periodischen Funktion G besitzt und geben Sie diese Funktion an.

Aufgabe 42: (4 Punkte)
Zeigen Sie: Sei $u \in C^2(G \times (0,T)) \cap C(\overline{G} \times [0,T])$ Lösung der Differentialgleichung

$$u_t = \Delta u + b \cdot \nabla u - cu$$

mit stetigen b, c und $c \geq 0$. Dann nimmt u sein Maximum und sein Minimum auf dem parabolischen Rand von $G \times (0,T)$ an.

Aufgabe 43: (4 Punkte)
Sei für $z \in \mathbb{C}$

$$u_z(x,t) = e^{xz+tz^2} \ .$$

Zeigen Sie:

(a) u_z ist Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung.

(b) u_z besitzt die Entwicklung

$$\begin{aligned} u_z(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) \frac{z^n}{n!} \ , \\ v_n(x,t) &= n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{t^k}{k!} \frac{x^{n-2k}}{(n-2k)!} \ . \end{aligned}$$

(c) v_n ist Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung.

Aufgabe 44: (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß folgende Funktionen Lösungen der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung sind.

(a) Die Theta-Reihe

$$\theta(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_1(x + 2n\pi, t)$$

mit der Fundamentallösung γ_1 (Konvergenz?)

(b) $u(x,t) = \text{erfc}\ (x/\sqrt{4t})$ mit der *complementary error function*

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2}\, dy\ .$$